ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO ESTIVO III

21/07/2023

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+(xy)^4)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Si dimostri che è continua, che esistono le derivate parziali, e che quest'ultime sono continue.

(b) Si dimostri che la funzione è anche differenziabile. (Utilizzare il Teorema del differenziale totale o in alternativa la definizione di differenziabilità).

Esercizio 2. Si determini il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2} x^{2n}.$$

Esercizio 3.

Verificare che per la funzione

$$f(x,y,z) = -2x^3 + y^2 + 2y + z + e^z$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 0)$, in particolare che implicitamente z può essere scritta come funzione di (x, y). Dare l'equazione del piano tangente a $z(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

Esercizio 4.

(a) Enunciare il Teorema della Divergenza (detto anche Teorema di Gauss).

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, 3y, -2z)$ uscente attraverso la superficie data dall'unione del cerchio di raggio unitario centrato in $(x, y) = (0, 0)$ sul piano $z = 0$, e

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Soluzioni

1. La funzione in $(x, y) \neq (0, 0)$ è regolare. Studiamo quindi solo l'origine. Passando a coordinate polari, si ha che

$$0 \leq \frac{\log(1 + \rho^8(\cos\theta \sin\theta)^4)}{\rho^2} \leq C\rho^6 \to 0,$$

quindi è continua (si può dedurre anche con Taylor...). Per la derivabilità rispetto a x si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Data la simmetria $f(x, y) = f(y, x)$ si conclude la stessa cosa per la derivabilità in y. Derivando rispetto a x la f in $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha

$$\partial_x f(x, y) = \frac{\frac{4x^3y^4(x^2+y^2)}{1+(xy)^4} - 2x \log(1 + (xy)^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Di nuovo con coordinate polari si vede che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x, y) = 0 = \partial_x f(0, 0),$$

quindi la derivata parziale $\partial_x f$ è continua. Per simmetria vale lo stesso per $\partial_y f$.

1b. Per il Teorema del differenziale totale, la funzione è differenziabile in $(0, 0)$ poichè per quanto visto al punto precedente la funzione è C^1.

2. Con il cambio di variabile $x^2 = y$, riscriviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n^2} y^n. \tag{1}$$

Utilizzando il criterio della radice, otteniamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n} = e^{-2}.$$

Quindi (per la serie (1)) il raggio di convergenza è $R = \frac{1}{\ell} = e^2$, e dunque per la serie originaria $R = e$.

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(0, -1, 0) = 0$, $\partial_z f(x, y, z) = 1 + e^z$, che valutata in (x_0, y_0, z_0) vale $\partial_z f(0, -1, 0) = 2 \neq 0$, pertanto valgono le ipotesi del Teorema del Dini, quindi esiste $z = z(x, y)$ tale che $f(x, y, z(x, y)) = 0$ in un intorno di $(x_0, y_0) = (0, -1)$, $z(0, -1) = 0$, con z derivabile con derivate

$$\partial_x z(x, y) = -\frac{\partial_x f}{\partial_z f}, \quad \partial_y z(x, y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_z f}.$$

In particolare $\partial_x z(0, -1) = 0$ e $\partial_y z(0, -1) = 0$. Quindi l'equazione del piano tangente a $z(x, y)$ nel punto $(0, -1)$ è

$$z = z_0 + \langle \nabla z(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle = 0.$$

4a. Se D è un dominio semplice in $\mathbb{R}^3$ con frontiera Σ regolare a pezzi e orientabile, allora se F è campo vettoriale $C^1(D)$

$$\iiint_D \nabla \cdot F \, dxdydz = \iint_\Sigma F \cdot n_e \, d\sigma.$$

4b. Utilizziamo il Teorema del punto precedente affermando che il flusso è uguale all'integrale di volume il cui bordo è la superficie come descritta. Osserviamo che è una sezione di paraboloide. Inoltre, la divergenza del campo è $\nabla \cdot F = 2$, quindi, integrando per fili e passando a coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} Flusso &= \int_\Omega \nabla \cdot F \, dxdydz = 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} 1 \, dz \right) dxdy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(1-\rho^2) \, d\rho d\theta = 4\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2) \, d\rho = \pi. \end{aligned}$$